

## IV Semester B.A./B.Sc. Degree Examination, June 2008

(Semester Scheme)

## MATHEMATICS (Paper - IV)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 90

*Instructions :* 1) Answer all questions.

2) Answers should be written completely either in English or in Kannada.

(15×2=30)

I. Answer any fifteen of the following :

- 1) Show that the subgroup  $H = \{ 1, -1 \}$  of the multiplicative group  $G = \{ 1, -1, i, -i \}$  is normal in  $G$ .
- 2) If  $G$  is a group and  $H$  is a subgroup of index 2 in a group  $G$ , show that  $H$  is normal subgroup of  $G$ .
- 3) Show that every quotient group of an abelian group is an abelian group.
- 4) Define a homomorphism of groups.
- 5) Show that  $f : G \rightarrow G$  defined by  $f(x) = 2^x$  is not a homomorphism, where  $G$  is the multiplicative group of non-zero real numbers.

6) Prove that the function  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  is not continuous

at  $(0, 0)$ .

7) State Taylor's theorem for a function of two variables.

8) Prove that there is a minimum value at  $(0, 0)$  for the function  $x^3 + y^3 - 3xy$ .9) Prove that  $\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ .10) Prove that  $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ .11) Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot \theta} d\theta$ .



12) Solve  $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ .

13) Find the particular integral of  $(D^2 - 6D + 13)y = 5e^{2x}$ .

14) Show that the equation  $(1 + x^2)y'' + 3xy' + y = 1 + 3x^2$  is exact.

15) Verify the integrability condition of the equation  $yz dx - 2xz dy + (xy - zy^3) dz = 0$ .

16) Evaluate :  $L \{ e^{-t} \sin 2t \}$ .

17) Evaluate :  $L^{-1} \left\{ \frac{S}{(S+2)^2} \right\}$ .

18) Define Heavyside unit function.

19) Find all the basic solutions of the system of linear equations  $3x + 2y + z = 22$ ,  
 $x + y + 2z = 9$ .

20) Solve graphically the following system of inequalities.

$$2x + y \geq 3, x - 2y \leq -1, y < 3.$$

II. Answer **any two** of the following :

(2×5=10)

1) Prove that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is a normal subgroup of  $G$  if and only if the product of two right cosets of  $H$  in  $G$  is also a right coset of  $H$  in  $G$ .

2) Prove that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is normal if and only if  $ghg^{-1} \in H$ , for all  $g \in G, h \in H$ .

3) If  $f : G \rightarrow G'$  is a homomorphism and  $H$  is a subgroup of  $G$ , then prove that  $f(H)$  is a subgroup of  $G'$ .

4) Prove that every finite group is isomorphic to a permutation group.



III. Answer **any three** of the following :

(3×5=15)

1) Expand  $f(x, y) = e^x \cos y$  at the point  $(1, \frac{\pi}{4})$  using the Taylor's theorem upto that second degree term.

2) Find the extreme values of the function  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ .

3) Find the extreme values of  $x^2 + y^2$  subject to the condition  $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$ .

4) Prove that  $\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \beta(m, n)$  where  $m$  and  $n$  are both positive.

OR

Show that  $\int_0^a x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^6}{32}$ .

5) If  $m$  is an integer, then prove that  $\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}} \Gamma(2m)$ .

OR

Evaluate  $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2} dx$ .

IV. Answer **any three** of the following :

(3×5=15)

1) Solve  $(D^2 + 3D + 2)y = x^2 + \cos x$ .

2) Solve  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2y = x \log x$ .

3) Solve  $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3 e^x$ .

using  $e^{-x}$  as a part of complimentary function.

4) Solve  $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1)^2$  by the method of variation of parameters.

5) Solve  $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$ .



V. Answer **any two** of the following :

(2×5=10)

1) If  $L\{f(t)\} = F(s)$ , then prove that  $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(S) ds$ .

2) i) Evaluate :  $L^{-1}\left\{\frac{S^2}{(S-1)^2}\right\}$ .

ii) Prove that  $\int_0^\infty te^{-3t} \text{Sint} dt = \frac{3}{50}$ .

3) Solve :  $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ , given  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  by using Laplace transform method.

VI. Answer **any two** of the following :

(2×5=10)

1) Maximize  $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$  subject to the constraints

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 8, x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

2) The manager of an oil refinery must decide on the optimal mix of two possible blending process of which the inputs and outputs per production run as follows.

Process	Input Units		Output Units	
	Crude A	Crude B	Gasoline X	Gasoline Y
1	5	3	5	8
2	4	5	4	4

The maximum amounts available of Crude A and B are 200 units and 150 units respectively. Market requirements show that atleast 100 units of gasoline X and 80 units of gasoline Y must be produced. The profit per production run from process 1 and process 2 are Rs. 300 and Rs. 400 respectively. Solve LPP by graphical method.

3) Solve the following L.P.P. by simplex method. Maximize :  $f = x - y + 3z$ .  
subject to the constraints  $x + y + z \leq 10$ ,  $2x - z \leq 2$ ,  $2x - 2y + 3z \leq 0$ ,  $x, y, z \geq 0$ .



### ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ

I. ಯಾವುದಾದರೂ ಹದಿನೈದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(15×2=30)

- 1) ಉಪಸಂಕುಲ  $H = \{ 1, -1 \}$ ,  $G = \{ 1, -1, i, -i \}$  ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ನಾರ್ಮಲ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 2)  $G$  ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಹಾಗೂ ಇಂಡೆಕ್ಸ್ 2 ಇರುವ  $H$  ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲವಾದರೆ,  $H$  ಒಂದು ನಾರ್ಮಲ್ ಉಪ ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 3) ಒಂದು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಕುಲ ಅಬಿಲಿಯನ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 4) ಸಂಕುಲದ ಹೋಮೋ ಮಾರ್ಫಿಸಮ್ ಅನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
- 5)  $f: G \rightarrow G, f(x)=2^x$  ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಮ್ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ  $G$  ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕುಲ '.' ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

6)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು  $(0, 0)$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಅಲ್ಲ ಎಂದು

ಸಾಧಿಸಿ.

- 7) ಎರಡು ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಟೀಲರ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.
- 8)  $x^3 + y^3 - 3xy$  ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ  $(0, 0)$  ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಇದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 9) ಸಾಧಿಸಿ :  $\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ .
- 10) ಸಾಧಿಸಿ :  $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ .
- 11)  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot \theta} d\theta$  ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 12) ಬಿಡಿ :  $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ .
- 13)  $(D^2 - 6D + 13)y = 5e^{2x}$  ನ ವಿಶಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 14)  $(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 1 + 3x^2$  ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 15) ಅನುಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು  $yz dx - 2xz dy + (xy - zy^3) dz = 0$  ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.



- 16)  $L \{ e^{-t} \sin 2t \}$  ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 17)  $L^{-1} \left\{ \frac{S}{(S+2)^2} \right\}$  ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 18) ಹೆವಿಸೈಡ್ ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
- 19)  $3x + 2y + z = 22$ ,  $x + y + 2z = 9$  ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 20) ನಕ್ಷೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಬಂಧ ಸಮೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.  
 $2x + y \geq 3$ ,  $x - 2y \leq -1$ ,  $y < 3$ .

II. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5=10)

- 1)  $G$  ಎಂಬ ಸಂಕುಲದ  $H$  ಎಂಬ ಉಪಸಂಕುಲ ನಾರ್ಮಲ್ ಆಗಿರಲು  $H$ ನ ಎರಡು ಬಲ ಕೋಸೆಟ್ ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕೂಡ  $H$ ನ ಬಲ ಕೋಸೆಟ್  $G$  ನಲ್ಲಿ ಆಗಿರಬೇಕಾದುದು ಅವಶ್ಯ ಮತ್ತು ಸಾಕು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 2)  $G$  ಎಂಬ ಸಂಕುಲದ  $H$  ಎಂಬ ಉಪಸಂಕುಲ ನಾರ್ಮಲ್ ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ  $\forall g \in G, h \in H$ ,  $ghg^{-1} \in H$  ಅವಶ್ಯ ಮತ್ತು ಸಾಕು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 3)  $f: G \rightarrow G'$  ಒಂದು ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಮ್ ಆದರೆ  $H$  ಎಂಬುದು ಸಂಕುಲ  $G$ ನ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ  $f(H)$  ಎಂಬುದು ಸಂಕುಲ  $G'$ ನ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 4) ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಕುಲನವು ಒಂದು ಪ್ರಸ್ತಾರ ಸಂಕುಲಕ್ಕೆ ಐಸೋಮಾರ್ಫಿಕ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

III. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(3×5=15)

- 1) ಟೇಲರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ  $(1, \frac{\pi}{4})$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ  $f(x, y) = e^x \cos y$ ನ್ನು ಎರಡು ಘಾತಗಳ ಪದಗಳವರೆಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ.
- 2)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$  ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 3)  $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$  ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು  $x^2 + y^2$ ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



$$4) \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \beta(m, n) \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

ಅಥವಾ

$$\int_0^a x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^6}{32} \text{ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$5) m \text{ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, } \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}} \Gamma(2m) \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

ಅಥವಾ

$$\int_0^2 (4-x^2)^{3/2} dx \text{ ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

IV. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(3×5=15)

$$1) \text{ ಬಿಡಿ : } (D^2 + 3D + 2) y = x^2 + \cos x.$$

$$2) \text{ ಬಿಡಿ : } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2y = x \log x.$$

3)  $e^{-x}$  ಪೂರಕ ಉತ್ಪನ್ನದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದ್ದರೆ

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3 e^x \text{ ನ್ನು ಬಿಡಿ.}$$

4) ಬದಲಾಯಿಸುವ ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1)^2 \text{ ನ್ನು ಬಿಡಿ.}$$

$$5) \text{ ಬಿಡಿ : } \frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$$



V. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5=10)

1)  $L \{ f(t) \} = F(s)$ , ಆದರೆ  $L \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} F(s) ds$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2) i) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :  $L^{-1} \left\{ \frac{S^2}{(S-1)^2} \right\}$ .

ii)  $\int_0^{\infty} te^{-3t} \sin t dt = \frac{3}{50}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3) ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸನ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  ಆದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$
 ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

VI. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5=10)

1)  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 8, x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$  ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು  $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$  ನ್ನು ಗರಿಷ್ಠೀಕರಿಸಿ.

2) ಕೈಲ ಸಂಸ್ಕರಣದ ಪ್ರಬಂಧಕ ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟು ಮಿಶ್ರಣಕ್ಕೆ ಮಿಶ್ರಣ ಕ್ರಿಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ದರಿಸಬೇಕು. ಒಳಹರಿವು ಮತ್ತು ಹೊರಹರಿವು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ.

ಕ್ರಿಯೆ	ಒಳ ಹರಿವಿನ ಪ್ರಮಾಣ		ಹೊರ ಹರಿವಿನ ಪ್ರಮಾಣ	
	ಕಚ್ಚಾ A	ಕಚ್ಚಾ B	ಗಾಸೋಲೈನ್ X	ಗಾಸೋಲೈನ್ Y
1	5	3	5	8
2	4	5	4	4

A ಮತ್ತು B ಯ ಕಚ್ಚಾ ವಸ್ತುಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ 200 ಮತ್ತು 150 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಪೇಟೆಯ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಕನಿಷ್ಠ 100 ಪ್ರಮಾಣದ ಗ್ಯಾಸೋಲೈನ್ X ಮತ್ತು 80 ಪ್ರಮಾಣದ ಗ್ಯಾಸೋಲೈನ್ Y ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕ್ರಿಯೆ 1 ಮತ್ತು ಕ್ರಿಯೆ 2 ರ ಲಾಭಾಂಶ ಪ್ರತಿ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೂ. 300 ಮತ್ತು ರೂ. 400 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷೆ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮೇಲಿನ LPP ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

3) ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ :  $x + y + z \leq 10, 2x - z \leq 2, 2x - 2y + 3z \leq 0$   
 $x, y, z \geq 0$  ನಿಬಂಧನೆಗೊಳಪಟ್ಟು  $f = x - y + 3z$  ನ್ನು ಗರಿಷ್ಠೀಕರಿಸಿ.