IV Semester B.Sc./B.A. Examination, May/June 2006
(Semester Scheme)
MATHEMATICS (Paper – IV)

Time: 3 Hours Max. Marks: 90

Instructions: *1) Answer* ***all*** *questions.*
2) Answer should be written ***completely*** *either in* ***English*** *or in* ***Kannada.***

I. Answer **any fifteen** of the following : **(15×2=30)**

1) If H and K are normal subgroup of G. Prove that the subgroup $H \cap K$ is normal in G.

2) $f : G \to G'$ is a homomorphism of a group G into a group G' and Kernel $f = \{e\}$ prove that f is one-one.

3) Show that the factor group of an abelian group is abelian.

4) Show that the mapping $f : C \to R$ such that $f(x + iy) = x$ is a homomorphism where C and R are respectively groups of complex and Real numbers w.r.t addition.

5) If the mapping $f : C \to C$ defined by f(z) = az where a is a non zero complex number is a homomorphism, prove that it is an isomorphism.

6) Prove that the function $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ is continuous at (0, 0).

7) State Taylor's theorem for a function of two variables.

8) Show that $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ is minimum at the point (1, 1).

9) Prove that $\lceil n+1 = n \lceil n$.

10) Evaluate $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 \, dx$.

11) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\ d\theta$.

12) Find the particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2$.

13) Find the part of the complementary function of

$y'' - \text{Cot}\, x\, y' - (1 - \text{Cot}\, x)\, y = e^x \text{Sin}\, x$.

14) Verify that the equation $(1 - x^2)\ y'' - 3xy' - y = 0$ is exact.

15) Verify the condition for integrability for the equation $2yzdx + zx\, dy - xy\, (1 + z)\, dz = 0$.

16) P.T $L\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

17) Evaluate $L\left[\frac{\text{Sin}^2 t}{t}\right]$.

18) If $L[f(t)] = F(S)$ P.T $L[f'(t)] = S\,F(S) - f(0)$.

19) Find all the basic solutions of the system of linear equations $x + 2y + z = 4$; $2x + y + 5z = 5$.

20) Draw the graph of the solution set satisfying the inequalities.

$2x - 3y \leq 6$

$2x + y \leq 4$

$x \geq 0\ ;\ y \geq 0$.

II. Answer **any two** of the following : **(2×5=10)**

1) Prove that the product of two normal subgroups of a group is a subgroup of the group.

2) If G is a group and H is a normal subgroup of G then prove that G/H is a homomorphic image of G with H as kernel.

3) State and prove Cayley's theorem.

4) If $G = \{a + b\sqrt{2} \ \forall \ a, b \in Q\}$ show that $f : (G, +) \to (G, +)$ defined by $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ is an isomorphism.

III. Answer **any three** of the following : **(3×5=15)**

1) Expand $f(x, y) = y^2/x^3$ at the point $(1, -1)$ using Taylor's theorem up to the second degree term.

2) Find the maximum value of $2(x - y)^2 - x^4 - y^4$.

3) Find the maxima and minima of $u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ when $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$.

4) P.T $\beta(m, n) = \dfrac{\lceil m \ \lceil n}{\lceil m+n}$ $m, n > 0$.

OR

Evaluate $\int_0^1 x^3 \left(1 - \sqrt{x}\right) dx$.

5) Show that $\int_0^1 \dfrac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \beta(m, n)$

OR

P. T. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{cosec}\theta} \ d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} \ d\theta = \pi$.

IV. Answer **any three** of the following : **(3×5=15)**

1) Solve : $(D^3 + 2D^2 + D)\, y = e^{2x} + x^2 + x$.

2) Solve : $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x \dfrac{dy}{dx} + y = x + \dfrac{1}{x}$.

3) Solve : $\dfrac{dx}{dt} - 7x + y = 0, \ \dfrac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0$.

4) Solve : $\frac{dx}{mz-ny} = \frac{dy}{nx-lz} = \frac{dz}{ly-mx}$.

5) Solve: $3x^2dx + 3y^2dy - (x^3 + y^3 + e^{2z})\,dz = 0$ by verifying the integrability condition.

V. Answer **any two** of the following : **(2×5=10)**

1) Evaluate $L^{-1}\left\{\frac{1}{S(S+1)(S+2)}\right\}$.

2) Solve $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3dy}{dt} + 2y = e^{3t}$ given $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$ using Laplace transformation.

3) If $L\{f(t)\} = F(s)$ given $y(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{for } t > a \\ 0 & \text{for } t < a \end{cases}$

prove that $L\{y(t)\} = e^{-as}\,F(S)$.

VI. Answer **any two** of the following : **(2×5=10)**

1) Using the graphical method find the minimum value of $z = -x + 2y$ subject to the constraints

$-x + 3y \le 10$
$x + y \le 6$
$x - y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$

2) The food stuffs A and B has three vitamins V_1, V_2, V_3 as follows

Food Stuff	V_1 (mg)	V_2 (mg)	V_3 (mg)
A	1	100	10
B	1	10	100

minimum daily requirements of three vitamins are 1 mg. , 50 mg. and 10 mg. The cost of food stuff A is Rs. 2 and that of B is Rs. 3. By graphical method find the minimum cost of the diet that would supply the body minimum requirements of each vitamin.

3) Using simplex method maximize $P = x - y + 3z$

subject to $x + y + z \leq 10$

$2x - z \leq 2$

$2x - 2y + 3z \leq 0$

$x, y, z \geq 0$.

ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ

ಸೂಚನೆಗಳು : 1) ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

2) ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆಂಗ್ಲ ಅಥವಾ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು.

I. ಯಾವುದಾದರೂ **ಹದಿನೈದು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : **(15×2=30)**

1) H ಮತ್ತು K ಗಳು G ಸಂಕುಲದ ನಾರ್ಮಲ್ ಉಪಸಂಕುಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $H \cap K$ ಎಂಬುದು G ಯ ನಾರ್ಮಲ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2) G ಸಂಕುಲದಿಂದ G′ ಸಂಕುಲಕ್ಕೆ $f : G \to G'$ ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಂ ಮತ್ತು $\text{Ker } f = \{e\}$ ಆದರೆ f ಒಂದು-ಒಂದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3) ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲದ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಕುಲವು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4) $f : C \to R$ ಇದು $f(x + iy) = x$ ಎಂದಾಗ ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಂ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ C ಮತ್ತು R ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಾಂಪ್ಲಿಕ್ಸ್ ಮತ್ತು ರಿಯಲ್ಸ್ ಸಂಕುಲ, ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ.

5) $f : C \to C$ $f(z) = az$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದರೆ f ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಂ ಆಗಿದ್ದು ಇಲ್ಲಿ C ಯು ಕಾಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದು a ಯು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಕಾಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ f ಐಸೋಮಾರ್ಫಿಸಂ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $f(x, y)$ ಎಂಬುದು $(x, y) = (0, 0)$ ನಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7) ಟೈಲರ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಎರಡು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿ.

8) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $(1, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9) $\lceil n+1 = n \lceil n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10) $\int_0^1 x^4 (1 - x)^3 \, dx$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.