III Semester B.A./B.Sc. Examination, December 2006
(Semester Scheme)
MATHEMATICS (Paper – III)

Time: 3 Hours | Max. Marks: 90

*Instruction: Answer should be written **completely in English** or in Kannada.*

I. Answer **any fifteen** of the following: (15×2=30)

1) Find the order of the elements of the group $(Z_4, \oplus_4)$.

2) Prove that every cyclic group is abelian.

3) Show that the multiplicative group G = {1, –1, i, –i} is cyclic group.

4) Find the number of generators of a cyclic group of order 60.

5) Define Index of a sub group H of a finite group G.

6) State Fermat's theorem.

7) Find the limit of a sequence $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n/b}$.

8) If $\{a_n\}$ is a convergent sequence of positive terms, then evaluate $\lim_{n\to\infty} a_n$ when $a_{n+1} = \frac{6}{5+a_n}$.

9) Prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5\sin \pi/n}{n^2} = 2$.

10) Show that the series $\frac{1.2}{4.5.6}+\frac{3.4}{6.7.8}+\frac{5.6}{8.9.10}+$.............. is divergent.

11) Discuss the nature of the series $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+$..........

12) If the series $\sum a_n$ of positive terms is convergent then prove that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

13) State Cauchy's root test for a series of positive terms.

14) Prove that $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots \text{to } \infty = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ where $-1 < x < 1$.

15) Prove that if a function f (x) is differentiable at $x = x_0$ then it is continuous at $x = x_0$.

16) State Rolle's theorem.

17) Verify Cauchy's mean value theorem for the function $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ in [1, 3].

18) Evaluate $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \frac{x - \sin x}{x^3}$ by L-Hospital Rule.

19) Obtain the Fourier coefficient a_0 of $f(x) = \begin{cases} x & , 0<x<\pi \\ 0 & , \pi<x<2\pi \end{cases}$

20) Define half range Fourier Cosine series for a function f (x) over the interval (0, l).

II. Answer **any three** of the following: **(3×5=15)**

1) If a is any element of the group G and $0(a) = n$ then prove that $a^m = e$ for any integer m if and only if n divides m.

2) Define the cyclic group. Prove that if 'a' is generator of a cyclic group G, then a^{-1} is also generator.

3) State and prove Lagrange's theorem.

4) Prove that the group G = {2, 4, 6, 8} under multiplication modulo 10 is a cyclic group. Write down all the generators.

5) Prove that a finite group of prime order is cyclic.

III. Answer **any two** of the following: **(2×5=10)**

1) Prove that every convergent sequence is bounded.

2) Discuss the nature of the sequence $\{x^n\}$ where $x \in R$.

3) Examine the behaviour of

i) $\left\{ n \left[\log_e(n+1) - \log_e n \right] \right\}$

ii) $\left\{ \dfrac{3+7+11+\ldots\ldots\ldots\text{to n terms}}{2n^2+3n} \right\}$.

IV. Answer **any three** of the following: **(3×5=15)**

1) Discuss the nature of $\sum \dfrac{1}{n^p}$.

2) Discuss the convergence of the series $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2.4}{3.5}+\dfrac{2.4.6}{3.5.7}+\ldots\ldots\ldots\text{to}\infty$.

3) Discuss the convergence of $\sum \dfrac{4.7.10\ldots\ldots(3n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n)} x^n, x>0$.

4) Show that the geometric series $1 + x + x^2 + \ldots\ldots$ is convergent if $0 < x < 1$ and divergent if $x \geq 1$.

5) Sum the series $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1.4}{6.12}+\dfrac{1.4.7}{6.12.18}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

V. Answer **any two** of the following: **(2×5=10)**

1) State and prove Lagrange's mean value theorem of differential calculus.

2) Prove that every function defined and continuous on a closed interval is bounded.

3) Expand $\tan^{-1}x$ as a series of x up to x^5 using Maclaurin's series.

4) Evaluate $\underset{x \to \pi/2}{\text{lt}} (\operatorname{Sin} x)^{\tan x}$.

VI. Answer **any two** of the following: **(2×5=10)**

1) Obtain the Fourier series of the function f (x) = x ($-\pi < x < \pi$) and hence deduce that $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots.$

2) Find the half range Fourier sine series for the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x & , \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} & , \quad \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

3) Find the half range Cosine series for the function f (x) = e^x in (0, 1).

ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ

ಸೂಚನೆಗಳು: 1) ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

*2) ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ **ಕನ್ನಡ** ಅಥವಾ ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು.*

I. ಯಾವುದಾದರೂ ಹದಿನೈದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(15×2=30)**

1) (Z_4, $\oplus_4$) ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳ ಧಾತ್ವಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲ ಆಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3) G = {1, –1, i, –i} ಸಂಕುಲ ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4) 60 ಧಾತ್ವಾಂಶಗಳುಳ್ಳ ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದಕಗಳು ಇವೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5) G ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲ H ಆದಾಗ, ಇಂಡೆಕ್ಸ್‌ನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

6) ಫರ್ಮಾಟ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

7) $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n/b}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8) (a_n) ನ ಶ್ರೇಢಿಯು $a_{n+1} = \frac{6}{5+a_n}$ ಎಂದು ಇದ್ದಾಗ $\underset{n \to \infty}{\text{lt}}\ a_n$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9) $\underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \dfrac{2n^2 + 5\mathrm{Sin}\,\pi/n}{n^2} = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10) $\dfrac{1.2}{4.5.6} + \dfrac{3.4}{6.7.8} + \dfrac{5.6}{8.9.10} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ಶ್ರೇಣಿಯು ಡೈವರ್‌ಜೆಂಟ್ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$ ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

12) $\sum a_n$ ಶ್ರೇಣಿಯು ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಯಾದರೆ $\underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}}\, a_n = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13) ಒಂದು ಧನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಕೌಶಿಯ ಮೂಲ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

14) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots \text{to } \infty = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), -1 < x < 1,$ ಆದಾಗ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15) f (x) ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = x_0$ ನಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು $x = x_0$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16) ರೋಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

17) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, [1, 3] ನಲ್ಲಿ ಕೌಶಿಯ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

18) $\underset{x\to 0}{\mathrm{lt}} \dfrac{x - \mathrm{Sin}\,x}{x^3}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು L-ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ನಿಯಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19) $f(x) = \begin{cases} x & , 0 < x < \pi \\ 0 & , \pi < x < 2\pi \end{cases}$ ನ ಪೋರಿಯರ್ ಶ್ರೇಣಿಯ a_0 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20) f (x) ಕೋಸೈನ್ ಅರ್ಧ ರೇಂಜ್ ಪೋರಿಯರ್ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು (0, l) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

II. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(3×5=15)**

1) G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ a ಗುಣಾಂಶದ ಧಾತ್ವಾಂಕ n, $a^m = e$ ಆದಾಗ n ಪೂರ್ಣಾಂಕವು m ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭಾಜಕ ಅನ್ನುವುದು ಅಗತ್ಯ ಮತ್ತು ಸಾಕು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2) ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲದ ಉತ್ಪಾದಕವು 'a' ಆಗಿದ್ದರೆ, a^{-1} ಕೂಡಾ ಅದರ ಉತ್ಪಾದಕವು ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3) ಲ್ಯಾಗ್ರಾಂಜಿಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.

4) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $\times \bmod 10$ ಎಂಬ ಸಂಕುಲವು ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ಪಾದಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಕುಲದ ಧಾತ್ವಾಂಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ ಆ ಸಂಕುಲವು ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

III. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(2×5=10)**

1) ಯಾವುದೇ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2) $\{x^n\}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ, $x \in R$.

3) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

i) $\left\{n\left[\log_e(n+1)-\log_e n\right]\right\}$

ii) $\left\{\dfrac{3+7+11+\text{.........to n terms}}{2n^2+3n}\right\}$.

IV. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(3×5=15)**

1) $\sum \dfrac{1}{n^p}$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

2) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2.4}{3.5}+\dfrac{2.4.6}{3.5.7}+\text{...........}\ to\ \infty$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

3) $\sum \dfrac{4.7.10........(3n+1)}{1.2.3.........n}x^n, x>0$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

4) $1 + x + x^2 + \text{......}$ ಶ್ರೇಣಿಯು $0 < x<1$ ಆದಾಗ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದು ಮತ್ತು $x \geq 1$ ಆದಾಗ ಅಪಸರಣವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1.4}{6.12}+\dfrac{1.4.7}{6.12.18}+\text{.............}$ ನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

V. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(2×5=10)**

1) ಲ್ಯಾಗ್ರಾಂಜಿಯ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.

2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿರಂತರ ಉತ್ಪನ್ನವು [a, b] ನಲ್ಲಿ ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3) ಮೆಕ್ಲಾರಿಯನ್ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\tan^{-1}x$ ಎಂಬುದನ್ನು x^5 ವರೆಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\text{Sin}\, x)^{\tan x}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

VI. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ: **(2×5=10)**

1) $f(x) = x$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ $(-\pi < x < \pi)$ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಫೋರಿಯರ್ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x & , \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} & , \quad \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಫೋರಿಯರ್ ಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $f(x) = e^x$, (0, 1) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಫೋರಿಯರ್ ಕೊಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.