

Second Semester B.Sc./B.A. Examination, April/May 2005
(Semester Scheme)
MATHEMATICS (Paper - II)

Time : 3 Hours

Max. Marks: 90

*Instructions : 1) Answer all questions.**2) Answers should be written completely either in English or in Kannada.*I. Answer any **fifteen** of the following :

(15×2 = 30)

- 1) If 0 is an eigen value of a square matrix A, then prove that A is singular.
- 2) For what value of x is the rank of the matrix A equal to 3 given

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

- 3) Find the value of k such that the following system of equations has non-trivial solutions.

$$(k - 1)x + (3k + 1)y + 2kz = 0$$

$$(k - 1)x + (4k - 2)y + (k + 3)z = 0$$

$$2x + (3k + 1)y + 3(k - 1)z = 0$$

- 4) Find the eigen values of the metric $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix}$.

- 5) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ the characteristic equation is $\lambda^2 - \lambda - 5 = 0$.

Using it, find A^{-1} .

- 6) For an equiangular spiral $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ show that the tangent at every point is inclined at a constant angle with the radius vector.
- 7) Find the pedal equation of the curve $r = a\theta$.
- 8) Show that for the curve $r\theta = a$ the polar subtangent is a constant.

- 9) In the curve $pa^n = r^{n+1}$, show that the radius of curvature varies inversely as the $(n-1)^{\text{th}}$ power of the radius vector.
- 10) Show that the origin is a conjugate point of the curve $x^2 + 3y^2 + x^3y = 0$.
- 11) Find the envelope of the family of lines $y = mx + \frac{a}{m}$, where 'm' is a parameter.
- 12) Find the asymptotes (if any) of the curve $x^3y^2 + x^2y^3 = x^3 + y^3$ parallel to the y-axis.
- 13) Prove that $y = e^x$ is everywhere concave upwards.
- 14) Find the length of the arc of the semi-cubical parabola $ay^2 = x^3$ from the vertex to the point (a, a).
- 15) Find the whole area of the circle $r = 2a \cos \theta$.
- 16) Solve : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$
- 17) Solve : $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$.
- 18) Find the integrating factor of the equation $x dy - y dx + 2x^3 dx = 0$.
- 19) Solve : $p^2 + p(x+y) + xy = 0$ where $p = \frac{dy}{dx}$.
- 20) Find the singular solution of $y = xp + p^2$.

II. Answer **any three** questions :

(5×3 = 15)

- 1) Find the rank of the matrix A by reducing to the normal form given :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- 2) If $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ determine two non-singular matrices P and Q such

that $PAQ = I$. Hence find A^{-1}

3) For what values of λ and μ the equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 6y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

have (1) no solution (2) a unique solution (3) infinite number of solutions.

4) Find the eigen values and eigen sectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5) State and prove the Cayley-Hamilton theorem.

III. Answer **any two** questions : (2×5 = 10)

1) Find the angle of intersection of the parabolas $r = \frac{a}{1 + \cos\theta}$ and

$$r = \frac{b}{1 - \cos\theta}.$$

2) Show that the p-r equation of the curves $x = a \cos^3 \theta$ and $y = a \sin^3 \theta$ is

$$r^2 = a^2 - 3p^2.$$

3) For the curve $x = x(t)$, $y = y(t)$ show that the radius of curvature.

$$\rho = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

4) Prove that the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

IV. Answer **any two** questions :

(2×5 = 10)

1) Find the points of inflexion on the curve $x = \log\left(\frac{y}{x}\right)$.

2) Determine the position and nature of the double points on the curve

$$y(y-6) = x^2(x-2)^3 - 9.$$

3) Find all the asymptotes of the curve

$$4x^2(y-x) + y(y-2)(x-y) = 4x + 4y - 7.$$

4) Trace the curve $y^2(a-x) = x^2(a+x)$, ($a > 0$).

V. Answer **any two** questions :

(2×5 = 10)

1) Find the perimeter of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2) Find the surface area generated by revolving an arch of the cycloid

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

about the x-axis.

3) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ about the initial line.

VI. Answer **any three** questions :

(3×5 = 15)

1) Solve : $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$

2) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$

3) Solve : $2y dx + (2x \log x - xy) dy = 0$

4) Show that the family of parabolas $y^2 = 4a(x+a)$ are self orthogonal.

ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ

I. ಯಾವುದಾದರೂ ಹದಿನೈದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(15×2 = 30)

1) ಒಂದು ಚಚ್ಚೌಕ ಕೋಶ A ದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆಯು 0 ಆದರೆ, A ಯು ಸಿಂಗ್ಯುಲರ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$ ದ ದರ್ಜೆಯು 3 ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$3) \begin{aligned} (k-1)x + (3k+1)y + 2kz &= 0 \\ (k-1)x + (4k-2)y + (k+3)z &= 0 \\ 2x + (3k+1)y + 3(k-1)z &= 0 \end{aligned}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ 'k' ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$4) A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix} \text{ ಕೋಶದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ಕೋಶದ ಕ್ಯಾರೆಕ್ಟರಿಸ್ಟಿಕ್ ಸಮೀಕರಣ } \lambda^2 - \lambda - 5 = 0 \text{ ಆದರೆ ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ } A^{-1} \text{ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$6) r = ae^{\theta \cot \alpha} \text{ ಸಮಕೋನ ಸ್ಪೈರಲ್ ನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಶೇ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವು ಸ್ಥಿರವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$7) r = a\theta \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಪಾದಿಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$8) r\theta = a \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಫೋಲಾರ್ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಸ್ಥಿರವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$9) pa^n = r^{n+1} \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವಕ್ರತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಶೇಯ (n-1) ನ ಘಾತದ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$10) \text{ ಮೂಲ ಬಿಂದುವು } x^2 + 3y^2 + x^3y = 0 \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕಾಂಜುಗೇಟ್ ಬಿಂದುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$11) m \text{ ಎಂಬುದು ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್ ಆದರೆ } y = mx + \frac{a}{m} \text{ ರೇಖೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಎನ್‌ವಲಪ್‌ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$12) x^3y^2 + x^2y^3 = x^3 + y^3 \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು (ಇದ್ದಲ್ಲಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$13) y = e^x \text{ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲಾಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಕಾನಕೇವ ಅಪವರ್ಡ್ಸ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

$$14) ay^2 = x^3 \text{ ಎನ್ನುವ ಸೆಮಿಕ್ಯುಬಿಕಲ್ ಪರವಲಯದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಭಿಮುಖ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (a, a) ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$15) r = 2a \cos \theta \text{ ವೃತ್ತದ ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

$$16) \text{ ಬಿಡಿಸಿ: } \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

17) ಬಿಡಿಸಿ : $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$.

18) $x dy - y dx + 2x^3 dx = 0$, ಅನುಕಲನ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19) ಬಿಡಿಸಿ : $p^2 + p(x+y) + xy = 0$ ಇಲ್ಲಿ $P = \frac{dy}{dx}$.

20) $y = xp + p^2$ ದ ಸಿಂಗ್ಯುಲರ್ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ :

(3×5 = 15)

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ಎಂಬ ಕೋಶವನ್ನು ನಾರ್ಮಲ್ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು

ಅದರ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ P ಮತ್ತು Q ನಾನ್‌ಸಿಂಗ್ಯುಲರ್ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದು $PAQ = I$ ಸಮೀಕರಣದ

ಸಹಾಯದಿಂದ A^{-1} ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $x + y + z = 6$, $x + 6y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ 1) ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲ 2) ಒಂದೇ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ 3) ಅನಂತ ಪರಿಹಾರ ಇದ್ದಲ್ಲಿ λ ಮತ್ತು μ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ಕೋಶದ 'ಐಗನ್ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಐಗನ್ ವಿಶಾಲುತ್ವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ'.

5) ಕ್ಯಾಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.

III. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ :

(2×5 = 10)

1) $r = \frac{a}{1 + \cos \theta}$ ಮತ್ತು $r = \frac{b}{1 - \cos \theta}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಭೇದಕ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ (P - r) ಸಮೀಕರಣವು $r^2 = a^2 - 3p^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3) $x = x(t)$, $y = y(t)$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ವಕ್ರತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\rho = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ ಎಂಬುದು ಎವಲ್ಯೂಟ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

IV. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5 = 10)

1) $x = \log\left(\frac{y}{x}\right)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಇನ್‌ವೆಕ್ಷನ್ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $y(y-6) = x^2(x-2)^3 - 9$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ದ್ವಿಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $4x^2(y-x) + y(y-2)(x-y) = 4x + 4y - 7$ ದರ ಎಲ್ಲಾ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) $y^2(a-x) = x^2(a+x)$, ($a > 0$) ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.

V. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5 = 10)

1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ಆಸ್ಟಾಯಿಡ್ ನ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ಸೈಕ್ಲಾಯಿಡ್ನ ಒಂದು ಬಾಹು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಮೇಲೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) ಕಾರ್ಡಿಯಾಯಿಡ್ $r = a(1 + \cos\theta)$ ಮೂಲರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

VI. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(3×5 = 15)

1) ಬಿಡಿಸಿ : $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$

2) ಬಿಡಿಸಿ : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$

3) ಬಿಡಿಸಿ : $2y dx + (2x \log x - xy) dy = 0$

4) $y^2 = 4a(x+a)$ ಎಂಬ ಪರವಲಯದ ವರ್ಗವು ತಮಗೆ ತಾವೇ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.