

Second Semester B.Sc. / B.A. Examination, May/June 2010
(Semester Scheme)
MATHEMATICS (Paper – II)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 90

Instructions : 1) Answer *all* questions.2) Answer should be written **completely** either in **English** or in **Kannada**.I. Answer **any fifteen** of the following :**(15×2=30)**

1) Define rank of a matrix.

2) Find A^{-1} , using elementary row operations where $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.3) For what value of λ , the following system has non-trivial solution

$$\lambda x + y - z = 0$$

$$3x + 4y + z = 0$$

$$2x - 3y - 3z = 0.$$

4) Define Eigen values and Eigen vectors of a matrix.

5) If λ is the Eigen value of A then prove that λ^{-1} is the Eigen value of A^{-1} .6) Show that for a curve $r = a\theta$, the polar subnormal is constant.7) Find the angle between the radius vector and the tangent to the curve $r = be^{a\theta}$.8) With usual notations prove that $p = r \sin \phi$ 9) Find $\frac{ds}{dt}$ for the curve $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.10) Find the radius of curvature for the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ at $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

11) Define evolute and involute of a curve.



- 12) Show that $y = \log x$ is convex upwards.
- 13) Show that $y = x^3$ has a point of inflexion at origin.
- 14) Write the formula for the length of the curve $x = f(y)$ between the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) .
- 15) Find the area bounded by the curve $y = c \cos h \left(\frac{x}{c} \right)$ and the x-axis between $x = 0$ and $x = a$.
- 16) Solve $e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$.
- 17) Find the integrating factor of $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2 y}{1+x^3} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3}$
- 18) Show that $(x^2 - 2xy - y^2) \, dx - (x+y)^2 \, dy = 0$ is exact.
- 19) Solve $p^2 - 5p + 6 = 0$ where $p = \frac{dy}{dx}$.
- 20) Find general and singular solution of $y = px + p^2$.

II. Answer **any three** of the following :

(3×5=

- 1) Reduce the matrix A to its normal form and hence find the rank of A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 2) Using elementary transformations find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



3) For what values of μ and λ the following system of equations

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \mu z = \lambda$$

have 1) Unique solution

2) No solution

3) Infinite solution ?

4) State and prove Cayley Hamilton's theorem.

5) Find Eigen values and Eigen vectors of $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

III. Answer **any two** of the following :

(2×5=10)

1) Show that the following pair of curves intersect orthogonally.

$$r = a (\sin \theta - \cos \theta), r = a (\sin \theta + \cos \theta)$$

2) Find p - r equation of $r^n = a^n \cos n \theta$.

3) With usual notations prove that $\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2}$

4) Show that evolute of the curve $x = a \left[\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right]$ $y = a \sin t$ is the catenary

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

IV. Answer **any two** of the following :

(2×5=10)

1) Find the range of x , for which $y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$ is concave or convex. Also find the point of inflexion.

2) Find the envelope of the family of lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ where a and b are connected by the relation

i) $a + b = c$

ii) $a^2 + b^2 = c^2$.



3) Find all the asymptotes of the curve

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0.$$

4) Trace the curve $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$.

V. Answer **any two** of the following :

(2×5=)

1) Find the perimeter of Asteroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2) Find the volume of solid obtained by revolving the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

3) Find the surface of the solid generated by revolution of the curve $x = a \cos t$,
 $y = b \sin t$ about x - axis.

VI. Answer **any three** of the following :

(3×5=)

1) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$.

2) Solve $\frac{dy}{dx} + \frac{x + y \cos x}{1 + \sin x} = 0$.

3) Find general solution and singular solution of $y = 3px + 6p^2y^2$.

4) Find the orthogonal trajectories of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + \lambda} = 1$ where λ is arbitrary constant.

ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ

I. ಯಾವುದಾದರೂ 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(15×2=)

1) ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ ಎಂದರೇನು ?

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಆ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ A^{-1} , ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $\lambda x + y - z = 0$, $3x + 4y + z = 0$, $2x - 3y - 3z = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಕ್ಷದ್ವಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

- 4) ಒಂದು ಕೋಶದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಐಗನ್ ದಿಶಾಯುಕ್ತ ಎಂದರೇನು ?
- 5) λ ಎಂಬುದು A ಕೋಶದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆಯಾದರೆ λ^{-1} ಎಂಬುದು A^{-1} ಕೋಶದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 6) $r = a\theta$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಪಾದಿಕ ಸಮೀಕರಣವು ಸ್ಥಿರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 7) $r = be^{a\theta}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಶ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 8) ರೂಢಿಯ ಸಂಕೇತದಂತೆ $p = r \sin \phi$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ
- 9) $x = a \cos t, y = b \sin t, \frac{ds}{dt}$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 10) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ರ ಮೇಲೆ ವಕ್ರತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 11) ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಎವಲೂಟ್ ಮತ್ತು ಇನ್‌ವಲೂಟ್ ಎಂದರೇನು ?
- 12) $y = \log x$ ಕಾನವೆಕ್ಸ್ ಅಪವರ್ತ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 13) ಮೂಲಬಿಂದುವು $y = x^3$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಇನ್‌ಫ್ಲೆಕ್ಷನ್ ಬಿಂದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- 14) $x = f(y)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು (x_1, y_1) ನಿಂದ (x_2, y_2) ವರೆಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ..
- 15) $y = c \cos h \left(\frac{x}{c}\right)$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು $x = 0, x = a$ ಮತ್ತು x -ಅಕ್ಷಯರೇಖೆಯವರೆಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 16) ಬಿಡಿಸಿ : $e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$.
- 17) $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2 y}{1+x^3} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3}$ ಇಂಟಿಗ್ರೇಟಿಂಗ್ ಅಂಶವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 18) $(x^2 - 2xy - y^2) \, dx - (x+y)^2 \, dy = 0$ ಎಕ್ಸಾಟ್ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.
- 19) ಬಿಡಿಸಿ : $p^2 - 5p + 6 = 0, p = \frac{dy}{dx}$.
- 20) $y = px + p^2$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು ಸಿಂಗುಲರ್ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

II. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ಕೋಶವನ್ನು ನಾರ್ಮಲ್ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ ಮತ್ತು ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) μ ಮತ್ತು λ ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ

$$x + y + z = 6, \quad x + 2y + 3z = 10, \quad x + 2y + \mu z = \lambda$$

- ಒಂದೇ ಪರಿಹಾರ
- ಪರಿಹಾರ ರಹಿತವಾದುದು
- ಅನಂತ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ.

4) ಕ್ಯಾಲೆ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.

5) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಈ ಕೋಶದ ಐಗನ್ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಐಗನ್ ವೆಕ್ಟರ್ ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ..

III. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5=10)

1) $r = a (\sin \theta - \cos \theta)$, $r = a (\sin \theta + \cos \theta)$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2) $r^n = a^n \cos n\theta$, $p - r$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) ರೂಢಿಯ ಸಂಕೇತದಿಂದ $\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4) $x = a \left[\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right]$, $y = a \sin t$ ಆದರೆ ಎವಲ್ಯೂಟ್ $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

IV. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1) $y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$ ಯಾವ ಸೀಮೆಯಲ್ಲಿ

i) ಕಾನಕೇವ್

ii) ಕಾನವೆಕ್ಸ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಇನ್‌ಫ್ಲೆಕ್ಸ್‌ನ್ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಎನ್‌ವಲೋಪ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. a ಮತ್ತು b ಸಂಬಂಧ

i) $a + b = c$

ii) $a^2 + b^2 = c^2$.

3) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.

V. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(2×5=10)

1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ಸಮೀಕರಣದ ಪೇರಿಮೀಟರ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $r = a(1 + \cos\theta)$ ಕಾರ್ಡಿಯಾಡಿನ ಉಂಟಾಗುವ ಘನಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $x = acost$, $y = bsint$ x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

VI. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

(3×5=15)

1) ಬಿಡಿಸಿ: $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$

2) ಬಿಡಿಸಿ: $\frac{dy}{dx} + \frac{x + y \cos x}{1 + \sin x} = 0$

3) $y = 3px + 6p^2y^2$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು ಸಿಂಗ್ಯುಲರ್ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + \lambda} = 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.